Schulstunde

Wir üben quadratische Gleichungen

ANFÄNGERTEXT

Datei Nr. 12218

Stand 1. April 2023

Friedrich W. Buckel

Internetbibliothek für Schulmathematik und Studium

www.mathe-cd.de

Anleitung

Willkommen in meiner Schulstunde, in der wir quadratische Gleichungen üben. Wir sprechen in 27 kleinen Abschnitten die wichtigen Methoden durch.

Es gibt dazu einen umfassenden Text, in dem viel geübt und erklärt wird: 12220.
Hier konzentrieren wir uns auf das Üben von einigen wichtigen Aufgaben.

Und ich sage es gleich:
Ich mag die p-q-Formel nicht. Sie liefert oft schnelle Lösungen, kann aber auch fürchterlich ins Auge gehen, wenn die Gleichung ungünstige Zahlen enthält.
Doch dazu mehr im Laufe der Schulstunde.

Wenn du Begründungen für die Lösungsformeln suchst, dann lies bitte in 12220 nach.

Noch etwas:
Die Lösung mit der **quadratischen Ergänzung** besprechen wir hier nicht.
Quadratische Ergänzung ist sicher für machen Aufgaben wichtig.
Aber für die Lösung quadratischer Gleichungen ist sie sehr umständlich.
Man braucht sie zwar für den Beweis der beiden Lösungsformeln,
aber dies soll uns heute nicht interessieren.
Du willst doch lernen, wie man sicher und flott quadratische Gleichungen lösen kann.

Hier ein kleines Inhaltsverzeichnis:

In welchen Abschnitten wird was behandelt?

1 Quadratische Gleichungen haben unterschiedliche Formen.

Der Name „quadratisch" sagt uns, dass die Gleichung x^2 enthalten muss, aber keine höhere Potenz von x. Solche Gleichungen können ganz unterschiedlich aussehen.
Am einfachsten sind die reinquadratischen Gleichungen, etwa in der Form

$x^2 = c$ oder $ax^2 + c = 0$

Das sind quadratische Gleichungen ohne Absolutglied: $ax^2 + bx = 0$

Oder beliebige quadratische Gleichungen: $ax^2 + bx + c = 0$

Es gibt verschiedene Methoden diese Gleichungen zu lösen, manche sind günstig, manche umständlich. Du lernst heute, welche Gleichungsform man am besten wie löst ☺.

Wir müssen dazu einige Grundlagen über Quadratwurzeln ansprechen. ⇒ 2

---

14 Ich habe dir ab Abschnitt 4 gezeigt, wie man die quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit der „Mitternachtsformel" lösen kann. Die Lösungsformel lautet $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Es gibt für spezielle Gleichungen eine andere Formel, die man p-q-Formel nennt, oder $\frac{p}{2}$ – Formel. Weil für mich unverständlich viele Lehrer sich nur mit dieser Formel befassen, biete ich dir natürlich auch Übungsbeispiele an. Ich werde dir vor allem zeigen, in welchen Fällen sie ungünstig ist und die Rechnung erschwert.

Beginnen wir also:

Die spezielle Gleichungsform, auf die sich diese p-q-Formel bezieht, ist

$x^2 + px + q = 0$. Ihre Lösungsformel ist $\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

Das Merkmal dieser quadratischen Gleichungen ist der Koeffizient 1 von x^2.
Wir lösen nun gemeinsam das erste Beispiel dazu. Ich zeige rechts daneben noch das Lösungsverfahren mit der Mitternachtsformel:

Beispiel 1:

$x^2 - 2x - 15 = 0$

p= -2 und q = - 15.

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$-\frac{p}{2}$ ist dann **+1** und sein Quadrat **1**

$x_{1,2} = \mathbf{1} \pm \sqrt{\mathbf{1} + 15} = 1 \pm 4 = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

$x^2 - 2x - 15 = 0$

$a = 1,\ b = -2,\ c = -15$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} = \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

Nun löse auf dieselbe Weise Beispiel 2: $x^2 + 5x + 4 = 0$ ⇒ 15

$\boxed{2}$ Die Lösung der Gleichung $x^2 = 4$ besteht aus den Zahlen, deren Quadrat 4 ist.

Für solche zahlen wurde die Quadratwurzel eingeführt:

$\sqrt{4}$ ist die <u>positive</u> Zahl, deren Quadrat 4 ist.

$\sqrt{5}$ ist die <u>positive</u> Zahl, deren Quadrat 5 ist, usw.

Viele Wurzeln kann man berechnen: $\sqrt{4} = 2$, denn $2 \cdot 2$ oder $2^2 = 4$

Andere Kann man nicht exakt berechnen: $\sqrt{5} = 2{,}23606797...$

Die Zahlenreihe hinter dem Komme läuft unregelmäßig unendlich lang.

$x^2 = 4$ hat aber neben der positiven Lösung $x_1 = \sqrt{4} = 2$ noch die zweite Lösung $x_2 = -2$

$x^2 = 5$ hat neben der positiven Lösung $x_1 = \sqrt{5}$ noch die zweite Lösung $x_2 = -\sqrt{5}$.

Du solltest dir also merken:

Eine Wurzel ist stets nur die positive Lösung einer reinquadratischen Gleichung.
Diese hat aber noch eine zweite Lösung, mit dem negativen Vorzeichen.
Es gibt allerdings eine Ausnahme: $x^2 = 0$ hat nur die eine Lösung $x = 0$.

Kleine Aufgabe für dich: Löse diese Gleichungen:

a) $x^2 = 49$ b) $x^2 = 144$ c) $x^2 = -9$ $\Rightarrow$ $\boxed{3}$

$\boxed{15}$ **Beispiel 2:**

$x^2 + 5x + 4 = 0$

p = 5 und q = 4.

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir brauchen $-\frac{p}{2} = -\frac{5}{2}$:

$$x_{1,2} = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - 4}$$

$$= -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{25}{4} - \tfrac{16}{4}} = -\tfrac{5}{2} \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}}$$

$$= -\tfrac{5}{2} \pm \tfrac{3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

$x^2 + 5x + 4 = 0$

$a = 1, b = 5, c = 4$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

Jetzt zeigt die p-q-Formel bereits leichte Schwächen, denn sie zwingt zum Bruchrechnen, was nichts Schlimmes ist, was aber Fehler provoziert.

Aufgabe: Löse die folgenden Gleichungen mit der p-q-Formel:

$x^2 + 26x + 169 = 0$ und $x^2 - 3x + \frac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{16}$